УДК 535.317.25, 535.42

В.В. ЮРЕВИЧ

ОБЩЕЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ РАССЕЯНИЯ ТОЧКИ ИДЕАЛЬНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ УГЛОВОЙ АПЕРТУРОЙ

In this work an exact solution for the scalar point spread function (PSF) of a perfect optical system represented as Debye integral has been analyzed. The functional dependence between resolving power of an optical system by Rayleigh criterion and the numerical aperture of the optical system *NA* has been redetermined.

Функция рассеяния точки (ФРТ) оптической системы представляет собой по определению дифракционное изображение точечного источника света, формируемое оптической системой в ее фокальной плоскости. ФРТ идеальной оптической системы имеет большое значение в теоретической и прикладной оптике, так как с ней непосредственно связан наиболее известный критерий разрешающей способности оптических систем – критерий Рэлея. Если мы обратимся к научной, учебной или справочно-энциклопедической литературе по оптике, например [1–9], то обнаружим, что в качестве ФРТ идеальной оптической системы с круглым зрачком принимается так называемая дифракционная структура Эйри, представленная на рис. 1 *а*, *в*. Рис. 1 *б*, *г* иллюстрирует критерий Рэлея, в соответствии с которым идеальная оптическая система разрешает два некогерентных точечных источника света, если расстояние между центрами соответствующих дифракционных картин равно величине радиуса первого темного кольца r_1 в дифракционной структуре Эйри. При этом, как видно из рис. 1 *г*, максимум распределения ФРТ одного точечного источника лежит на первом минимуме ФРТ другого. Таким образом, величина разрешающей способности оптических систем по критерию Рэлея определяется значением радиуса первого темного кольца r_1 в дифракционной структуре Эйри, который, как известно, вычисляется по формуле:

$$r_1 = 0{,}61\frac{\lambda}{NA}, \tag{1}$$

где λ – длина световой волны, а NA – числовая апертура оптической системы в пространстве изображений. Математическое выражение для ФРТ идеальной оптической системы с круглым зрачком имеет следующий вид:

$$I(\rho) = I_0\left[\frac{2J_1(k\rho NA)}{k\rho NA}\right]^2. \tag{2}$$

Это широко известное выражение в несколько ином виде впервые было получено Эйри [10] на основе принципа Гюйгенса – Френеля. Далее в работах Гельмгольца и Кирхгофа была сформулирована так называемая интегральная теорема Гельмгольца – Кирхгофа [3], которая дала точное математическое выражение принципа Гюйгенса – Френеля и которая является сегодня основой для решения большинства дифракционных задач прикладной оптики. Заметим, что данная теорема, непосредственно следующая из скалярного волнового уравнения для комплексного монохроматического поля U:

$$\nabla^2 U - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

описывает явления дифракции света в приближении скалярных волн и, естественно, может давать неверные результаты в тех случаях, когда поляризация света и его электромагнитная природа играют существенную роль. Так, для учета всех возможных эффектов, связанных с поляризацией электромагнитных волн, при вычислении поля в фокальной области оптической системы часто используются выражения, полученные Ричардсом и Вольфом [11, 12]. Вместе с тем скалярная теория дифракции продолжает применяться для анализа структуры изображения в оптических системах не только с низкими, но и с высокими числовыми апертурами [13].

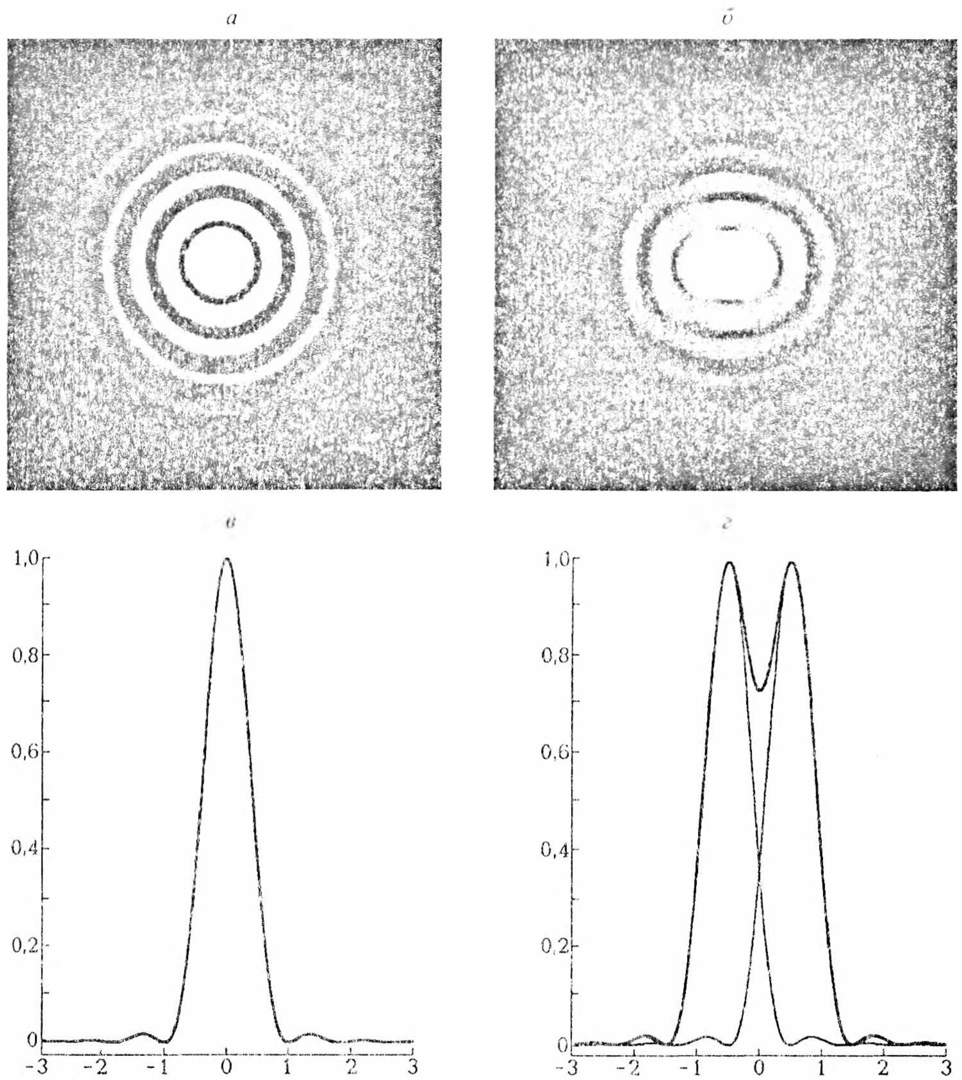

Рис. 1. Дифракционная структура Эйри (*а*) и соответствующий ей профиль распределения энергии (*в*). Два точечных источника света на пределе дифракционного разрешения по критерию Рэлея (*б*) и соответствующий им профиль распределения световой энергии (*г*)

Следует отметить, что как решение Эйри (2), так и следующая из него величина радиуса первого темного кольца r_1 (1), определяющая разрешающую способность оптической системы по критерию Рэлея, оказались фактически канонизированными в оптике. Такая ситуация привела к широко распространенному среди оптиков ошибочному мнению, что при увеличении числовой апертуры оптической системы NA дифракционная структура ФРТ подчиняется уравнению (2), а ее разрешающая способность всегда определяется выражением (1). Так, например, автор известного учебного пособия по прикладной оптике [14] ошибочно полагает, что выражения (1), (2) имеют место для предельного в фокусирующей оптике случая, когда $NA = 1$ (случай сходящейся сферической полуволны).

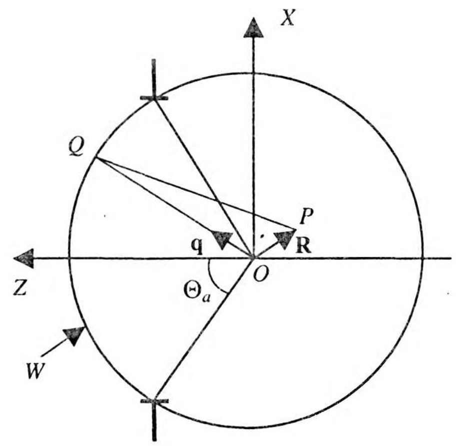

Рис. 2. К определению дифракционного интеграла Дебая

Однако выражение (2) не обладает статусом общего решения для ФРТ оптической системы с круглым зрачком, так как получено в приближении низких числовых апертур. Наиболее точное выражение для ФРТ оптической системы, справедливое в рамках скалярной теории дифракции, следует из интеграла, полученного Дебаем [15]. Известно, что комплексная амплитуда поля E_P в произвольной точке P фокальной области сходящейся сферической волны W (рис. 2) может быть представлена в виде следующего дифракционного интеграла Дебая:

$$E_P = -\frac{i}{\lambda} A \iint_{\Omega} e^{-ik\mathbf{q}\cdot\mathbf{R}} d\Omega, \qquad (3)$$

где $\mathbf{q}$ – единичный вектор в направлении от точки фокуса O к некоторой точке Q на волновом фронте, а $\mathbf{R}$ – радиус-вектор произвольной точки P в фокальной области [3, раздел 8.8.1]. Интегрирование в (3) ведется в пределах телесного угла Ω, под которым виден выходной зрачок оптической системы. Данный интеграл является прямым следствием принципа Гюйгенса – Френеля, выраженного интегральной теоремой Гельмгольца – Кирхгофа, и представляет собой точное решение для комплексной амплитуды светового поля в фокальной области идеальной оптической системы. Отметим, что авторы наиболее авторитетного труда по оптике [3] рассматривают интеграл Дебая только в контексте низких числовых апертур. Однако на основании интегральной теоремы Гельмгольца – Кирхгофа очевидно, что интеграл Дебая (3) определен и имеет физический смысл для любого телесного угла Ω, опирающегося на апертуру выходного зрачка, а в случае $\Omega=4\pi$ – дает решение в фокусе сходящейся сферической волны.

Проинтегрируем (3) в сферической системе координат. Пусть Θ_a – угловая апертура оптической системы в пространстве изображений (см. рис. 2), следовательно, по определению ее числовая апертура $NA=\sin\Theta_a$.

После несложных преобразований мы приходим к искомому выражению:

$$E_P(\rho) = -ikA \int_0^{\Theta_a} J_0(k\rho \sin\Theta)\sin\Theta d\Theta, \qquad (4)$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ является радиусом, на котором находится точка $P(x, y, z)$ в фокальной плоскости оптической системы (при $z=0$). Этот интеграл фактически представляет собой общее аналитическое решение для амплитуды ФРТ идеальной оптической системы, которое справедливо для любой угловой апертуры Θ_a и которое можно рассматривать как частный случай интеграла Дебая (3). Анализ этого выражения позволяет легко предсказать поведение дифракционной структуры ФРТ и разрешающей способности оптической системы с произвольной числовой апертурой NA в рамках скалярной теории дифракции. Действительно, заменяя в подынтегральном выражении (4) $\sin\Theta$ на Θ, получаем следующий интеграл:

$$E_P(\rho) = -ikA\int_0^{\Theta_a} J_0(k\rho\Theta)\Theta d\Theta\,, \tag{5}$$

из которого следует широко известное аналитическое решение:

$$E_P(\rho) = -ikA(NA)^2\frac{J_1(k\rho NA)}{k\rho NA}\,. \tag{6}$$

Квадрат модуля этого выражения дает интенсивность поля в виде дифракционной структуры Эйри (2), радиус r_1 первого темного кольца в которой, как известно, определяется выражением (1), следующим из условия $k\rho NA$=3,83171, где 3,83171 – первый корень цилиндрической функции Бесселя $J_l(x)$. Отметим, что выражение (4) позволяет нам точно определить понятие так называемой малой (низкой) числовой апертуры. Действительно, числовую апертуру оптической системы NA можно считать малой, если выполнено следующее условие: $NA=\sin\Theta_a\approx\Theta_a$. Как уже было показано, только при этом условии (условии линейности функции $\sin\Theta_a$) мы получаем структуру Эйри как ФРТ идеальной оптической системы, а радиус первого темного кольца ФРТ в этом случае равен $0{,}61\lambda/NA$.

Интеграл (4) может быть вычислен аналитически еще в двух точках. Учитывая существование двух интегральных представлений для сферической функции Бесселя $j_0(x)$

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{n}\int_0^{n\pi/2} J_0(x\sin\Theta)\sin\Theta d\Theta,\ \ n = 1,\ 2,$$

и сравнивая их с (4), мы сразу можем получить два важных решения, соответствующих случаям сходящейся сферической полуволны при $\Theta_a=\pi/2$ (NA=1):

$$E_P(\rho) = -ikA\frac{\sin(k\rho)}{k\rho} \tag{7}$$

и сходящейся сферической волны при $\Theta_a=\pi$:

$$E_P(\rho) = -2ikA\frac{\sin(k\rho)}{k\rho}\,. \tag{8}$$

Отметим, что решения (7) и (8) согласуются с физическим смыслом, так как (8) представляет собой удвоенный результат (7), т. е. сложение двух полуволн. Помимо этого, первый минимум распределения энергии в ФРТ сходящейся полуволны или волны, соответствующий условию $k\rho=\pi$, находится на расстоянии $\rho=\lambda/2$, т. е. диаметр первого темного кольца (диска Эйри) равен длине волны λ.

Таким образом, в рамках скалярной теории дифракции мы приходим к следующему выводу. Амплитуда ФРТ идеальной оптической системы с круглым зрачком в интервале изменения угловой $0<\Theta_a\leq\pi/2$ или числовой апертуры $0<NA\leq1$ плавно трансформируется от распределения Эйри (6) при малых числовых апертурах к распределению (7) – сферической функции Бесселя j_0 при NA=1:

$$\frac{J_1(k\rho NA)}{k\rho NA} \to \frac{\sin(k\rho NA)}{k\rho NA}.$$

Одновременно происходит плавное смещение положения первого темного кольца в дифракционной структуре ФРТ от значения $0{,}61\lambda/NA$ к значению $0{,}5\lambda/NA$ при $NA=1$. Таким образом, коэффициент k_1 в формуле, определяющей радиус r_1 первого темного кольца ФРТ, а также величину разрешающей способности оптической системы по критерию Рэлея

$$r_1 = k_1 \frac{\lambda}{NA}, \tag{9}$$

в действительности является функцией числовой апертуры оптической системы NA и изменяется в интервале от 0,61 до 0,5. Вычисленный путем отделения первого корня выражения (4) график функции $k_1(NA)$ представлен на рис. 3. В таблице приводится ряд вычисленных значений k_1 как функции числовой NA и соответствующей угловой апертуры Θ_a.

Итак, общее решение (4) позволило нам установить уточненный закон разрешающей способности оптической системы по критерию Рэлея, выраженный математически в виде (9), где коэффициент k_1 является функцией числовой апертуры оптической системы NA и определяется таблицей и соответствующим графиком на рис. 3.

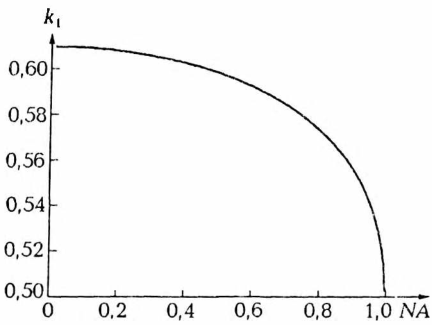

Рис. 3. График функциональной зависимости $k_1(NA)$

Функциональная зависимость k_1 $[NA\ (\Theta_a)]$

NA	Θ_a,°	k_1	NA	Θ_a,°	k_1
0,05	2,87	0,610	0,79	52,19	0,575
0,10	5,74	0,609	0,80	53,13	0,573
0,15	8,63	0,609	0,81	54,10	0,572
0,20	11,54	0,608	0,82	55,08	0,571
0,25	14,48	0,607	0,83	56,10	0,569
0,30	17,46	0,606	0,84	57,14	0,568
0,35	20,49	0,605	0,85	58,21	0,566
0,40	23,58	0,603	0,86	59,32	0,564
0,45	26,74	0,601	0,87	60,46	0,562
0,50	30,00	0,598	0,88	61,64	0,560
0,55	33,37	0,596	0,89	62,87	0,558
0,60	36,87	0,592	0,90	64,16	0,556
0,65	40,54	0,589	0,91	65,51	0,554
0,70	44,43	0,585	0,92	66,93	0,551
0,71	45,23	0,584	0,93	68,43	0,548
0,72	46,05	0,583	0,94	70,05	0,545
0,73	46,89	0,582	0,95	71,81	0,542
0,74	47,73	0,581	0,96	73,74	0,538
0,75	48,59	0,579	0,97	75,93	0,534
0,76	49,46	0,578	0,98	78,52	0,528
0,77	50,35	0,577	0,99	81,89	0,520
0,78	51,26	0,576	1,00	90,00	0,500

В заключение следует отметить, что общее решение для ФРТ идеальной оптической системы в виде (4) не выделено явно в работе Дебая [15], хотя и следует из полученных им общих выражений. Отметим также, что при изучении и преподавании одного из важнейших разделов оптики, связанного с дифракционной структурой изображения в оптических системах, авторы многочисленных исследований не обращают должного внимания на интеграл Дебая (3) и его прямое следствие (4). Именно по этой причине общее решение (4) и по сей день остается практически невостребованным в теоретической и прикладной оптике, о чем свидетельствуют не только названные нами источники [1–9, 14], но и сотни других публикаций.

Представленные выше результаты были недавно анонсированы в [16].

1. Зоммерфельд А. Оптика. М., 1953.
2. Дитчберн Р. Физическая оптика. М., 1965.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., 1973.

4. Luneburg R.K. Mathematical Theory of Optics. Berkeley; Los Angeles, 1966.
5. Ландсберг Г.С. Оптика. М., 1976.
6. Матвеев А.Н. Оптика. М., 1985.
7. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Оптика. М., 1985.
8. Нагибина И.М., Москалев В.А., Полушкина Н.А., Рудин В.Л. Прикладная физическая оптика. М., 2002. С. 338.
9. Физическая энциклопедия: В 5 т. М., 1994. Т. 4. С. 248, 405.
10. Airy G.B. // Trans. Cambr. Phil. Soc. 1835. Vol. 5. P. 283.
11. Wolf E. // Proc. Roy. Soc. 1959. Vol. A 253. P. 349.
12. Richards B., Wolf E. // Proc. Roy. Soc. 1959. Vol. A 253. P. 358.
13. Cole D.C., Barouc E., Hollerbach U., Orszag S.A. // Japan J. Appl. Phys. 1992. Vol. 31. P. 4110.
14. Турыгин И.А. Прикладная оптика. М., 1965. С. 8.
15. Debye P. // Ann. Phys. (Leipzig). 1909. Vol. 30. P. 755.
16. Юревич В.В. // Труды V Международной конференции «Прикладная оптика»: В 3 т. СПб., 2002. Т. 3. С. 192.

Поступила в редакцию 13.12.2002.

Владимир Вячеславович Юревич – соискатель кафедры лазерной физики и спектроскопии БГУ. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой лазерной физики и спектроскопии Е.С. Воропай.

УДК 537.311.33

М.Г. ЛУКАШЕВИЧ, А.А. МАЗАНИК

РАЗМЕРНЫЙ ЭФФЕКТ В МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИИ ТОНКИХ ПЛЕНОК ПЕРМАЛЛОЯ

The size effect has been investigated in magnetoresistance of permalloy $Ni_{0,8}Fe_{0,2}$ thin films. These films were obtained on insulating substrates by means of ion-beam sputtering. Unlike non-magnetic films there was a decrease of positive magnetoresistance with decreasing sample length-width ratio observed. A model is suggested to explain positive anisotropic magnetoresistance changes due to the demagnetization factor increase with sample length-width decrease.

Размерный эффект в магнитосопротивлении (МС) диамагнитных материалов хорошо изучен для случая лоренцевского механизма магниторезистивного эффекта [1, 2], чего нельзя сказать о материалах, обладающих магнитным упорядочением, в широкой области напряженности магнитного поля которых МС определяется зависящей от намагниченности и внешнего магнитного поля плотностью состояний на уровне Ферми (так называемые анизотропный, гигантский и туннельный магниторезистивные эффекты) [3–5]. Отличительными особенностями МС магнитных материалов являются его зависимость от предыстории и наличие явлений гистерезиса, а среди основных факторов, влияющих на магнитополевую зависимость, можно назвать величину намагниченности M и угол θ между намагниченностью и направлением тока $\mathbf{j}$ в образце. Эти факторы определяются не только внешним магнитным полем, но и размерами образца, что может оказать существенное влияние на результаты измерения магниторезистивного эффекта в магнитоупорядоченных средах.

В работе исследовано проявление размерного эффекта в МС тонких (d=80–220 нм) пленок пермаллоя, полученных методом ионно-лучевого распыления во внешнем магнитном поле B=0,01 Тл на диэлектрических подложках. Первоначально пленкам придавалась форма квадрата со стороной 5–6 мм, на противоположные стороны которого наносились токовые контакты, располагавшиеся по направлению намагниченности образца или